

11.1

- a) Jonon erotusluku d saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 8 - 5 = 3 \qquad d = a_2 - a_1$$

- b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 15 ensimmäistä jäsentä. Koska erotusluku $d = 3$, saadaan jonon seuraava jäsen lisäämällä edelliseen jäseneseen aina luku 3.

	A
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20
7	23
⋮	⋮
15	47

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= A1 + 3$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Vastaus

- a) $d = 3$
b) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 5, 8, 11 ja 14.
Viidestoista jäsen on 47.

11.2

- a) Jonon suhdeluku q saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{6}{3} = 2$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

- b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 20 ensimmäistä jäsentä. Koska suhdeluku $q = 2$, saadaan jonon seuraava jäsen kertomalla edellinen jäsen aina luvulla 2.

	A
1	3
2	6
3	12
4	24
5	48
6	96
7	192
⋮	⋮
20	1 572 864

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= 2 \cdot A1$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Vastaus

a) $q = 2$

- b) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 3, 6, 12 ja 24.
Viidestoista jäsen on 1 572 864.

11.3

a) Rekursiosäännössä
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

oleva lausekkeen $a_n = 4 \cdot a_{n-1}$ mukaan jonon seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 4. Kyseessä on geometrinen jono, jonka suhdeluku $q = 4$.

b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 15 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	2	
2	8	
3	32	
4	128	
5	512	
6	2048	
7	8192	
⋮	⋮	
15	536 870 912	715 827 882

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= 4 \cdot A1$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lasketaan soluun B15 solujen A1–A15 summa: " $=\text{summa}(A1:A15)$ ".

Vastaus

a) geometrinen jono b) 715 827 882

11.4

- a) Rekursiosäännössä
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 4, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

olevan lausekkeen $a_n = a_{n-1} + 4$ mukaan jonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneseen luku 4. Kyseessä on aritmeettinen jono, jonka erotusluku $d = 4$.

- b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 15 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	2	
2	6	
3	10	
4	14	
5	18	
6	22	
7	26	
⋮	⋮	
15	58	450

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava "= A1 + 4".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lasketaan soluun B15 solujen A1–A15 summa: "=summa(A1:A15)".

Vastaus

- a) aritmeettinen jono b) 450

11.5

- a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 10 ensimmäistä jäsentä. Koska jono on aritmeettinen jono, jonka erotusluku $d = -5$, saadaan jonon seuraava jäsen vähentämällä edellisestä jäsenestä aina luku 5.

	A
1	9
2	4
3	-1
4	-6
5	-11
6	-16
7	-21
8	-26
9	-31
10	-36

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= A1 - 5$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

- b)** Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 10 ensimmäistä jäsentä.
Koska jono on geometrinen jono, jonka suhdeluku $q = -3$, saadaan jonon seuraava jäsen kertomalla edellinen jäsen aina luvulla -3 .

	B
1	9
2	-27
3	81
4	-243
5	729
6	-2187
7	6561
8	-19 683
9	59 049
10	-177 147

Soluun B1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun B2 kirjoitetaan laskukaava " $= -3 \cdot B1$ ".

Kopioidaan solussa B2 olevaa kaavaa alaspäin.

11.6

- a) Koska lukujonon seuraava jäsen aina vähentämällä edellisestä jäsenestä luku -5 , saadaan seuraava jäsen edellisestä aina lisäämällä luku -5 . Lukujono on siis aritmeettinen jono, jonka erotusluku $d = -5$.
- b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon jäseniä, kunnes saadaan lukujonon ensimmäinen negatiivinen jäsen.

	A
1	150
2	145
3	140
4	135
5	130
6	125
7	120
⋮	⋮
30	5
31	0
32	-5

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= A1 - 5$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Viimeinen positiivinen jäsen.

Lukujonon 30. jäsen on viimeinen positiivinen jäsen.

- c) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon 30 ensimmäisen jäsenen summa.

	A	B
1	150	
2	145	
3	140	
4	135	
5	130	
6	125	
7	120	
⋮	⋮	
30	5	2325

Lasketaan soluun B30 solujen A1–A30 summa: "=summa(A1:A30)".

Vastaus

- a) aritmeettinen jono
- b) 30. jäsen
- c) 2325

11.7

Ensimmäisen viikon lenkin pituus on 1,6 km.
Seuraavan viikon lenkin pituus saadaan edellisen viikon lenkin pituudesta aina lisäämällä 200 m = 0,2 km.
Lenkkien pituudet muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 1,6$ (km) ja erotusluku $d = 0,2$ (km).

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä, kunnes saadaan jäsen, joka on vähintään 10 (km).

	A	
1	1,6	Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.
2	1,8	Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava "= A1 + 0,2".
3	2	Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.
4	2,2	
5	2,4	
6	2,6	
7	2,8	
⋮	⋮	
42	9,8	
43	10	Lenkin pituus on 10 km.
44	10,2	

Mirjami saavuttaa 10 km:n tavoitteensa 43. viikolla

Vastaus

43. viikolla

11.8

Ensimmäisen viikon lenkin pituus on 4,0 m.

Seuraavan pompun korkeus saadaan kertomalla edellisen pompun korkeus aina luvulla $\frac{3}{5}$.

Pomppujen korkeudet muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 4,0$ (m) ja suhdeluku $q = \frac{3}{5}$.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä, kunnes saadaan jäsen, joka on alle 50 cm = 0,5 m.

	A
1	4
2	2,4
3	1,44
4	0,864
5	0,5184
6	0,31104

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= 3/5 \cdot A1$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Ensimmäinen jäsen, joka on alle 0,5 (m).

Kuudes pomppu on ensimmäinen, jonka korkeus on alle 50 cm.

Vastaus

6. pomppu

11.9

a) Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = -3 - (-7) = -3 + 7 = 4$$

$$a_3 - a_2 = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 5 - 1 = 4$$

$$a_5 - a_4 = 9 - 5 = 4$$

Havaitaan, että erotus on aina 4. Lukujono on siis aritmeettinen.
(Seuraava jäsen saadaan edellisestä lisäämällä aina luku 4).

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-3}{-7} \approx 0,429$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{-3} \approx -0,333$$

Havaitaan, että suhde ei ole aina sama luku. Lukujono ei siis ole geometrinen

Lukujono on aritmeettinen.

b) Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3$$

$$a_3 - a_2 = 9 - 6 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 15 - 9 = 6$$

Havaitaan, että erotus ei ole aina sama luku. Lukujono ei siis ole aritmeettinen.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{6} = 1,5$$

Havaitaan, että suhde ei ole aina sama luku. Lukujono ei siis ole geometrinen.

Lukujono ei ole kumpaakaan, ei aritmeettinen eikä geometrinen.

c) Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4$$

$$a_3 - a_2 = 25 - 5 = 20$$

Havaitaan, että erotus ei ole aina sama luku. Lukujono ei siis ole aritmeettinen.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{125}{25} = 5$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{625}{125} = 5$$

Havaitaan, että suhde on aina 5. Lukujono on siis geometrinen.
(Seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen aina luvulla 5).

Lukujono on geometrinen.

Vastaus

a) aritmeettinen b) ei kumpaakaan c) geometrinen

11.10

a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

viisi ensimmäistä jäsentä.

	A
1	1
2	3
3	9
4	27
5	81

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= 3 \cdot A1$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lukujono on geometrinen, koska seuraava jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen luvulla 3.

b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

viisi ensimmäistä jäsentä.

	B
1	1
2	8
3	15
4	22
5	29

Soluun B1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun B2 kirjoitetaan laskukaava "= B1 + 7".

Kopioidaan solussa B2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lukujono on aritmeettinen, koska seuraava jäsen saadaan aina lisäämällä edelliseen jäseneen luku 7.

c) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 7, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

viisi ensimmäistä jäsentä.

	C
1	1
2	10
3	37
4	118
5	361

Soluun C1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun C2 kirjoitetaan laskukaava " $= 3 \cdot C1 + 7$ ".

Kopioidaan solussa C2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lukujono ei ole aritmeettinen eikä geometrinen jono.

Vastaus

- a) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 1, 3, 9, 27 ja 81.
Lukujono on geometrinen.
- b) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 1, 8, 15, 22 ja 29.
Lukujono on aritmeettinen.
- c) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 1, 10, 37, 118 ja 361.
Lukujono ei ole kumpaakaan.

11.11

- a) Jonon erotusluku d saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = -3 - (-8) = -3 + 8 = 5$$

$$d = a_2 - a_1$$

- b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 30 ensimmäistä jäsentä. Koska erotusluku $d = 5$, saadaan jonon seuraava jäsen lisäämällä edelliseen jäsenen aina luku 5.

	A
1	-8
2	-3
3	2
4	7
5	12
6	17
7	22
⋮	⋮
30	137

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= A1 + 5$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Vastaus

- a) $d = 5$
b) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat -8, -3, 2 ja 7.
Kolmaskymmenes jäsen on 137.

11.12

- a) Jonon suhdeluku q saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{-8}{2} = -4$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

- b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 17 ensimmäistä jäsentä. Koska suhdeluku $q = -4$, saadaan jonon seuraava jäsen kertomalla edellinen jäsen aina luvulla -4 .

	A
1	2
2	-8
3	32
4	-128
5	512
6	-2048
7	8192
⋮	⋮
20	8 589 934 592

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava
" $= -4 \cdot A1$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa
alaspäin.

Vastaus

- a) $q = -4$

- b) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 2, -8, 32 ja -128.
Viidestoista jäsen on 8 589 934 592.

11.13

a) Rekursiosäännössä
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = -4 \cdot a_{n-1}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

oleva lausekkeen $a_n = -4 \cdot a_{n-1}$ mukaan jonon seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla -4 . Kyseessä on geometrinen jono, jonka suhdeluku $q = -4$.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 18 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	3	
2	-12	
3	48	
4	-192	
5	768	
6	-3072	
7	12 288	
⋮	⋮	
18	-51 539 607 552	-41 231 686 041

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.
Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= -4 \cdot A1$ ".
Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lasketaan soluun B18 solujen A1–A18 summa: " $=\text{summa}(A1:A18)$ ".

b) Rekursiosäännössä
$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

oleva lausekkeen $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$ mukaan jonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku $\frac{1}{2}$. Kyseessä on aritmeettinen jono, jonka erotusluku $d = \frac{1}{2}$.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 18 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	8	
2	8,5	
3	9	
4	9,5	
5	10	
6	10,5	
7	11	
⋮	⋮	
18	16,5	220,5

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava
"= A1 + 1/2".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lasketaan soluun B18 solujen A1–A18 summa: "=summa(A1:A18)".

Vastaus

a) geometrinen jono, summa on -41 231 686 041

b) aritmeettinen jono, summa on 220,5

11.14

- a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 10 ensimmäistä jäsentä. Koska jono on aritmeettinen jono, jonka erotusluku $d = -50$, saadaan jonon seuraava jäsen vähentämällä edellisestä jäsenestä aina luku 50.

	A
1	7680
2	7630
3	7580
4	7530
5	7480
6	7430
7	7380
8	7330
9	7280
10	7230

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= A1 - 50$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 10 ensimmäistä jäsentä.

Koska jono on geometrinen jono, jonka suhdeluku $q = -\frac{1}{2}$, saadaan

jonon seuraava jäsen kertomalla edellinen jäsen aina luvulla $-\frac{1}{2}$.

	B
1	7680
2	−3840
3	1920
4	−960
5	480
6	−240
7	120
8	−60
9	30
10	−15

Soluun B1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun B2 kirjoitetaan laskukaava " $= -1/2 \cdot B1$ ".

Kopioidaan solussa B2 olevaa kaavaa alaspäin.

11.15

Ensimmäisen päivän lääkeannos on 600 ml.

Seuraavan päivän lääkeannos saadaan vähentämällä edellisen päivän annoksesta aina 25 ml.

Lääkeannokset muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 600$ (ml) ja erotusluku $d = -25$ (ml).

- a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon 15 ensimmäistä jäsentä.

	A
1	600
2	575
3	550
4	525
5	500
6	475
7	450
⋮	⋮
15	250

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= A1 - 25$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Potilas saa 15. päivänä lääkettä 250 ml.

- b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä, kunnes saadaan viimeinen positiivinen jäsen.

	A
15	250
16	225
⋮	⋮
24	25
25	0
26	-25

Viimeinen positiivinen jäsen.

Lääkeannos on 0 ml.

Lääkekuurin viimeinen annos saadaan 24. päivänä. Lääkekuuri siis kestää 24 päivää.

- c) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla jonon 24 ensimmäisen jäsenen summa.

	A	B
1	600	
2	575	
⋮	⋮	
24	25	7500

Lasketaan soluun B24 solujen A1–A24 summa: "=summa(A1:A24)".

Vastaus

- a) 250 ml b) 24 päivää c) 7500 ml

11.16

Auton arvo ostohetkellä on 43 500 €.

Koska auton arvo alenee 15 % vuosittain, on auton arvo vuoden kuluttua $100 \% - 15 \% = 85 \%$ edellisen vuoden arvosta. Auton arvo saadaan siis kertomalla edellisen vuoden arvo aina luvulla 0,85.

Auton arvot vuosittain muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 43\,500$ (€) ja suhdeluku $q = 0,85$.

- a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon 6 ensimmäistä jäsentä.

	A	
1	43 500	Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.
2	36 975	Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= 0,85 \cdot A1$ ".
3	31 428,75	Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.
4	26 714,44	
5	22 707,27	Auton arvo 4 vuoden kuluttua ostohetkestä.
6	19 301,18	Auton arvo 5 vuoden kuluttua ostohetkestä.

Auton arvo 5 vuoden kuluttua on noin 19 300 €.

- b) Neljäsosa auton arvosta on $\frac{43\,500\text{ €}}{4} = 10\,875\text{ €}$. Lasketaan lukujonon jäseniä, kunnes saadaan jäsen, joka on alle 10 875 (€).

	A
⋮	⋮
6	19 301,18
7	16 406,00
8	13 945,10
9	11 853,34
10	10 075,34

Auton arvo 8 vuoden kuluttua.

Auton arvo 9 vuoden kuluttua.

Auton arvosta on jäljellä alle neljäsosa 9 vuoden kuluttua.

Vastaus

- a) 19 300 € b) 9 vuoden kuluttua

11.17

Ensimmäisen viikon juoksumatka on 10 km.

Ohjelma A:

Seuraavan viikon juoksumatka saadaan lisäämällä edellisen viikon matkaan 1 km.

Juoksumatkat muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 10$ (km) ja erotusluku $d = 1$ (km).

Ohjelma B:

Seuraavan viikon juoksumatka on $100 \% + 5 \% = 105 \%$ edellisen viikon juoksumatkasta. Seuraavan viikon juoksumatka saadaan kertomalla edellisen viikon matka luvulla 1,05.

Juoksumatkat muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 10$ (km) ja suhdeluku $q = 1,05$.

- a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla molempien lukujonojen 8 ensimmäistä jäsentä.

	A	B
1	10	10
2	11	10,5
3	12	11,03
4	13	11,58
5	14	12,16
6	15	12,76
7	16	13,40
8	17	14,07

Soluihin A1 ja B1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= A1 + 1$ ".
Soluun B2 kirjoitetaan laskukaava " $= 1,05 \cdot B1$ ".

Kopioidaan soluissa A2 ja B2 olevia kaavoja alaspäin.

8. viikolla ohjelman A mukaan juostaan 17 km ja ohjelman B mukaan noin 14 km.

- b)** Lasketaan lukujonon jäseniä, kunnes saadaan jäsen, joka on vähintään 50 (km).

	A	B
⋮	⋮	⋮
33	42	47,65
34	43	50,03
35	44	52,53
⋮	⋮	⋮
40	49	67,05
41	50	70,40
42	51	73,92

Ohjelman B juoksumatka on yli 50 km.

Ohjelman A juoksumatka on 50 km.

Juoksumatka on 50 km ohjelmassa A 41. viikolla ja ohjelmassa B 34. viikolla.

Vastaus

- a)** A: 17 km, B: 14 km **b)** A: 41. viikolla, B: 34. viikolla

11.18

a) Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 10 - 5 = 5$$

$$a_3 - a_2 = 15 - 10 = 5$$

$$a_4 - a_3 = 20 - 15 = 5$$

$$a_5 - a_4 = 25 - 20 = 5$$

Havaitaan, että erotus on aina 5. Lukujono on siis aritmeettinen.
(Seuraava jäsen saadaan edellisestä lisäämällä aina luku 5).

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{15}{10} = 1,5$$

Havaitaan, että suhde ei ole aina sama luku. Lukujono ei siis ole geometrinen.

Lukujono on aritmeettinen.

b) Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 8 - 4 = 4$$

Havaitaan, että erotus ei ole aina sama luku. Lukujono ei siis ole aritmeettinen.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{10}{8} = 1,25$$

Havaitaan, että suhde ei ole aina sama luku. Lukujono ei siis ole geometrinen.

Lukujono ei ole kumpaakaan, ei aritmeettinen eikä geometrinen.

c) Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = -27 - 9 = -36$$

$$a_3 - a_2 = 81 - (-27) = 108$$

Havaitaan, että erotus ei ole aina sama luku. Lukujono ei siis ole aritmeettinen.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-27}{9} = -3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{81}{-27} = -3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-243}{81} = -3$$

Havaitaan, että suhde on aina -3 . Lukujono on siis geometrinen.
(Seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen aina luvulla -3 .)

Lukujono on geometrinen.

d) Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 5 - 5 = 0$$

$$a_3 - a_2 = 5 - 5 = 0$$

$$a_4 - a_3 = 5 - 5 = 0$$

$$a_5 - a_4 = 5 - 5 = 0$$

Havaitaan, että erotus on aina 0. Lukujono on siis aritmeettinen.
(Seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneseen aina luku 0.)

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{5} = 1$$

Havaitaan, että suhde on aina 1. Lukujono on siis geometrinen.
(Seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen aina luvulla 1.)

Lukujono on kumpaakin, sekä aritmeettinen että geometrinen.

e) Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 9 - 4 = 5$$

$$a_3 - a_2 = 19 - 9 = 10$$

Havaitaan, että erotus ei aina ole sama luku. Lukujono ei siis ole aritmeettinen.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{19}{9} = 2,111\dots$$

Havaitaan, että suhde ei aina ole sama luku. Lukujono ei siis ole geometrinen.

Lukujono ei ole kumpaakaan, ei aritmeettinen eikä geometrinen.

Vastaus

- a) aritmeettinen
- b) ei kumpaakaan
- c) geometrinen
- d) kumpaakin
- e) ei kumpaakaan

11.19

a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon

$$\begin{cases} a_1 = 324 \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{3}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

viisi ensimmäistä jäsentä.

	A
1	324
2	108
3	36
4	12
5	4

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava " $= A1/3$ ".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lukujonon seuraava jäsen saadaan aina jakamalla edellinen jäsen

luvulla 3. Luvulla 3 jakaminen on sama asia kuin luvulla $\frac{1}{3}$

kertominen. Seuraava jäsen saadaan siis kertomalla edellinen jäsen aina

luvulla $\frac{1}{3}$. Lukujono on geometrinen jono.

b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon

$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = 3a_{n-1} - 15, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

viisi ensimmäistä jäsentä.

	B
1	8
2	9
3	12
4	21
5	48

Soluun B1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun B2 kirjoitetaan laskukaava " $= 3 \cdot B1 - 15$ ".

Kopioidaan solussa B2 olevaa kaavaa alaspäin.

Lukujono ei ole aritmeettinen eikä geometrinen jono.

c) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon

$$\begin{cases} a_1 = -7 \\ a_n = 15 + a_{n-1}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

viisi ensimmäistä jäsentä.

	C
1	-7
2	8
3	23
4	38
5	53

Soluun C1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun C2 kirjoitetaan laskukaava "= 15 + C1".

Kopioidaan solussa C2 olevaa kaavaa alaspäin.

Seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen aina luku 15.
Lukujono on aritmeettinen jono.

Vastaus

- a) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 324, 108, 36, 12 ja 4.
Lukujono on geometrinen.
- b) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 8, 9, 12, 21 ja 48.
Lukujono ei ole kumpaakaan.
- c) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat -7, 8, 23, 38 ja 53.
Lukujono on aritmeettinen.

11.20

Lukujonon seuraava termi lasketaan edellisen termin avulla kaavan

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \text{ mukaisesti.}$$

- a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon viisi ensimmäistä termiä, kun ensimmäinen termi $a_0 = 3$.

	A
1	3
2	1,833333
3	1,462121
4	1,414998
5	1,414214

Soluun A1 kirjoitetaan termi a_0 .

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava
 $= 1/2 \cdot (A1 + 2/A1)$.

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

$$a_1 \approx 1,833333$$

$$a_2 \approx 1,462121$$

$$a_3 \approx 1,414998$$

$$a_4 \approx 1,414214$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia termi a_4 poikkeaa luvusta $\sqrt{2}$.

$$\frac{1,414214 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Poikkeamaa verrataan lukuun $\sqrt{2}$.

$$\approx 0,000\,000\,3$$

$$= 0,000\,03\%$$

- b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon viisi ensimmäistä termiä, kun ensimmäinen termi $a_0 = 8$.

	A
1	8
2	4,125000
3	2,304924
4	1,586316
5	1,423549

Soluun A1 kirjoitetaan termi a_0 .

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava
 $"= 1/2 \cdot (A1 + 2/A1)"$.

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

$$a_1 \approx 4,125000$$

$$a_2 \approx 2,304924$$

$$a_3 \approx 1,586316$$

$$a_4 \approx 1,423549$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia termi a_4 poikkeaa luvusta $\sqrt{2}$.

$$\frac{1,423549 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Poikkeamaa verrataan lukuun $\sqrt{2}$.

$$\approx 0,007$$

$$= 0,7 \%$$

Vastaus

- a) $a_1 \approx 1,833333$, $a_2 \approx 1,462121$, $a_3 \approx 1,414998$, $a_4 \approx 1,414214$

Poikkeaa 0,000 03 %.

- b) $a_1 \approx 4,125000$, $a_2 \approx 2,304924$, $a_3 \approx 1,586316$, $a_4 \approx 1,423549$

Poikkeaa 0,7 %.

11.21

- a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä, kun ensimmäinen luku on 1.

	A
1	1
2	4
3	2
4	1
5	4
6	2
7	1
8	4
9	2
10	1
⋮	⋮

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava
"= JOS(ONPARILLINEN(A1); A1/2; 3·A1 + 1)".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Havaitaan, että kun ensimmäinen jäsen on 1, alkaa lukujonossa toistua numerosarja 4 2 1.

Perustelut käytetylle funktiolle:

JOS(ONPARILLINEN(A1); A1/2; 3·A1 + 1)

- funktio ONPARILLINEN(A1) testaa, onko luku solussa A1 parillinen
- jos luku on parillinen, suoritetaan laskutoimitus $A1/2$
- jos luku ei ole parillinen (eli on pariton), suoritetaan laskutoimitus $3 \cdot A1 + 1$
- kopioitaessa kaavaa, testaus ja laskut kohdistuvat aina lukujonon edelliselle luvulle.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä, kun ensimmäinen luku on 2, 3, 4 ja 5.

	B	C	D	E
1	2	3	4	5
2	1	10	2	16
3	4	5	1	8
4	2	16	4	4
5	1	8	2	2
6	4	4	1	1
7	2	2	4	4
8	1	1	2	2
9	4	4	1	1
10	2	2	4	4
11	1	1	2	2
12	4	4	1	1
13	2	2	4	4
14	1	1	2	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Havaitaan, että kaikissa näissä tapauksissa alkaa toistua numerosarja 4 2 1.

- b) Lasketaan lukujonon jäseniä, kun ensimmäinen jäsen on jokin muu positiivinen kokonaisluku.

	F	G	H	I
1	6	11	15	25
2	3	34	46	76
3	10	17	23	38
4	5	52	70	19
5	16	26	35	58
6	8	13	106	29
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	4	4	4	40
17	2	2	2	20
18	1	1	1	10
19	4	4	4	5
20	2	2	2	16
21	1	1	1	8
22	4	4	4	4
23	2	2	2	2
24	1	1	1	1

Havainto numerosarjan 4 2 1 toistuvuudesta näyttäisi pätevän muillakin positiivisilla kokonaisluvuilla.

Vastaus

- a) Lukujonossa alkaa toistua numerosarja 4 2 1.
b) Havainto näyttäisi pätevän muillakin positiivisilla kokonaisluvuilla.